平成 16 年度　東北大学工学部編入学試験問題

数　　　学

1. 原点 $\mathbf{O}(0, 0, 0)$ を中心とする半径が１の球（単位球）に内接する正四面体を考える．球の中心から各頂点 **A,B,C,D** に至る４本のベクトルを $\overrightarrow{\mathbf{OA}}, \overrightarrow{\mathbf{OB}}, \overrightarrow{\mathbf{OC}}, \overrightarrow{\mathbf{OD}}$ とし，$\overrightarrow{\mathbf{OA}}$ を z 軸に，$\overrightarrow{\mathbf{OB}}$ を xz 平面に置き，その４本の内，任意の２本のベクトルのなす角度を θ とする．この時，各ベクトルの成分は $\overrightarrow{\mathbf{OA}} = (0,0,1)$, $\overrightarrow{\mathbf{OB}} = (-\sin\theta, 0, \cos\theta)$,

$\overrightarrow{\mathbf{OC}} = (\sin\theta \cdot \cos 60°, -\sin\theta \cdot \sin 60°, \cos\theta)$,　　$\overrightarrow{\mathbf{OD}} = (\sin\theta \cdot \cos 60°, \sin\theta \cdot \sin 60°, \cos\theta)$

と表せる．

(1) $\cos\theta$, $\sin\theta$ の値を求めよ．

(2) 単位球と頂点 **B** で接する平面の方程式を求めよ．

(3) 正四面体の１辺の長さを求めよ．

(4) 正四面体の体積を求めよ．

原点: origin, 中心: center, 半径: radius, 球: sphere, 単位球: unit sphere, 内接する: inscribed, 正四面体: regular tetrahedron, 頂点: apex, ベクトル: vector, 軸: axis, 平面: plane, 角度: angle, 成分: component, 値: value, 接する: contact, 方程式: equation, 辺: side, 長さ: length, 体積: volume.

2. 関数 $f(x)$ の $x=a$ を中心とするテイラー展開は以下のように与えられる.

$$f(x) \sim f(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2 + \cdots$$

ただし, $f^{(n)}(x)$ は $f(x)$ の第 n 次導関数 $\frac{d^n f}{dx^n}$ を表す. また, $f'(x)$ および $f''(x)$ は $f(x)$ の導関数 $\frac{df}{dx}$ および第 2 次導関数 $\frac{d^2 f}{dx^2}$ をそれぞれ表す. 特に, $-1 < x < 1$ に対する関数 $\frac{1}{1-x}$ および $-\infty < x < \infty$ に対する関数 e^x の $x=0$ を中心とするテイラー展開はそれぞれ次のように与えられる.

$$\frac{1}{1-x} \sim \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \qquad e^x \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n.$$

x を実数とし, 関数 $g(x)$ と $h(x)$ を

$$g(x) = e^{x^2}, \qquad h(x) = \frac{e^{x^2}}{2-x}$$

と定義する.

(1) $g(x)$ の $x=0$ を中心とするテイラー展開を求めよ.

(2) 問 (1) の結果を用いて, $h(x)$ の $x=0$ を中心とするテイラー展開の x^2 の項までを求めよ.

(3) $h(x)$ の導関数 $h'(x)$ を求めよ.

(4) $y = h(x)$ の $-\infty < x < \infty$ における発散する点, 極値を与える点に注意して, グラフの概略を描け.

関数: function, テイラー展開: Taylor expansion, 第 n 次導関数: derivative of n-th order, 導関数: derivative, 第 2 次導関数: derivative of second order, 実数: real number, 項: term, グラフ: graph, 概略: outline.

3．実数y の関数：

$$f(y)=\frac{1}{1+e^{-\beta y}}, \qquad (-\infty<y<\infty)$$

を定義する．ここで，βは非負の実数値のみをとる定数である．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) βの値が以下の３つの場合：

a) $\beta\to+\infty$， b) $\beta=0$， c) その他の場合．

の各々について，$x=f(y)$ のグラフを描け．

(2) 関数 $x=f(y)$の逆関数 $y=f^{-1}(x)$を求めよ．

(3) 以下の不定積分を求めよ．

$$\int \log(1-x)\,dx$$

ただし，logは自然対数を表す．

(4) 以下の定積分を求めよ．

$$g(x)\equiv\int_0^x f^{-1}(z)dz$$

ただし，x の定義域は $0\le x\le 1$であり，$\lim_{x\to 0} x\log x=0$ の意味で $0\log 0=0$とする．

(5) 関数 $g(x)-\alpha x$ を最小化する x を求めよ．ただし，x の定義域は $0\le x\le 1$，αは正の実数値のみをとる定数とする．

実数: real number, 関数: function, 定義する: define, 非負の: non-negative, 定数: constant, グラフ: graph, 逆関数: inverse function, 不定積分: indefinite integral, 自然対数: natural logarithm, 定積分: definite integral, 最小化する: minimize, 定義域: domain, 正の: positive.