平成15年度　東北大学工学部編入学試験問題

数　　　学

1.　行列 $\boldsymbol{A}$ を $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ で定義する．

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の逆行列 $\boldsymbol{A}^{-1}$ を求めよ．

(2) 行列 $\boldsymbol{A}$ によって表される xy 平面上の線形変換を f とする．直線 $y=ax$ 上の任意の点の f による像が同じ直線 $y=ax$ 上にあるような a の値を求めよ．

(3) 行列 $\boldsymbol{U}$ を $\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ で定義する．このとき，$\boldsymbol{U}^n=\begin{pmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1} \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix}$ が成り立つことを証明せよ．ただし，n は自然数，α は0でない実数とする．

(4) 行列 $\boldsymbol{P}$ を $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ で定義する．このとき，$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ を求めよ．また，その結果と問 (3) で証明した式を用いて $\boldsymbol{A}^n$ を求めよ．ただし，n は自然数とする．

行列: matrix, 定義する: define, 逆行列: inverse matrix, 線形変換: linear transformation, 像: image, 証明: proof, 自然数: natural number, 実数: real number.

2. 関数 $f(x)$ のマクローリン展開は以下のように与えられる.

$$f(x) \sim f(0) + f'(0)\,x + \frac{1}{2} f''(0)\,x^2 + \cdots$$

ただし，f' と f'' は，それぞれ f の導関数と第2次導関数を示す.

(1) 関数

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

をマクローリン展開し，x^2 の項まで示せ.

(2) 以下の関係が成り立つことを示せ.

$$\frac{d}{dx}\left(\mathrm{Tan}^{-1} x\right) = \frac{1}{1+x^2}$$

ただし，関数 $y = \mathrm{Tan}^{-1} x$ は，関数 $y = \tan x$ の逆関数であり，原点を通る.

(3) 関数

$$F(x) = \mathrm{Tan}^{-1} x$$

について，$-\infty < x < \infty$ での増減・極値・グラフの凹凸・変曲点を調べよ.

(4) $y = F(x)$ のグラフの概形を描け.

関数: function, マクローリン展開: Maclaurin expansion, 導関数: derivative, 第2次導関数: derivative of second order, 項: term, 極値: extremal value, グラフ: graph, 凹凸: concave or convex, 変曲点: inflection point.

3． 関数$f(x)$は，微分方程式

$$x^2\frac{d^2f(x)}{dx^2}-2x\frac{df(x)}{dx}+2f(x)=0 \quad (x\geqq 1) \qquad \text{(a)}$$

および，初期条件

$$x=1 \text{ のとき } f=1,\ \frac{df}{dx}=0 \qquad \text{(b)}$$

を満たす．このとき，以下の問 (1)～(5) に答えよ．

(1) 方程式 (a) は，変数変換 $t=\log x$ によって，以下の微分方程式に帰着することを示せ．

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}-3\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=0 \qquad \text{(c)}$$

また，初期条件 (b) は，

$$t=0 \text{ のとき } y=1,\ \frac{dy}{dt}=0 \qquad \text{(d)}$$

となることを示せ．

(2) 方程式 (c) の一般解は，

$$y(t)=C_1e^{\lambda_1 t}+C_2e^{\lambda_2 t} \qquad \text{(e)}$$

で与えられる．方程式 (c) および初期条件 (d) を満たす実数$\lambda_1,\lambda_2,C_1,C_2$を求めよ．

(3) 初期条件 (b) のもとで方程式 (a) の解を求めよ．

(4) $z(t)=\dfrac{dy(t)}{dt}$ と定義する．いま，適切な 2×2 行列A を定義すれば，方程式 (c) は

$$\begin{pmatrix}\dfrac{dy(t)}{dt}\\[2ex] \dfrac{dz(t)}{dt}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}y(t)\\ z(t)\end{pmatrix}$$

と表される．行列Aを求めよ．

(5) 行列Aの固有値を求め，問 (2) で求めたλ_1,λ_2と比較せよ．

関数: function, 微分方程式: differential equation, 初期条件: initial condition, 変数変換: change of variables, 一般解: general solution, 実数: real number, 定義する: define, 行列: matrix, 固有値: eigenvalue.