平成 14 年度　東北大学工学部編入学試験問題

数　　学

1. 2 行 2 列の単位行列を E と表し，行列 A, B を

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = A^{-1}$$

と定義する．ただし，A^{-1} は A の逆行列である．

(1) A^2, A^4, A^8, B を行列の形に書き表せ．

(2) $A - B$ および $A^2 + B^2$ を計算せよ．

(3) 等式

$$a_0 = 0, \qquad a_1 = 1, \qquad \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

が成り立つように $a_0, a_1, a_2, \cdots$ を決めるとき，a_8 と a_9 の値を求めよ．

(4) A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

単位行列: unit matrix, 行列: matrix, 定義する: define, 逆行列: inverse matrix, 等式: equation, 固有値: eigenvalue, 固有ベクトル: eigenvector.

2. x を実数とし，関数 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ を

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}},$$

$$g(x) = \sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}},$$

$$h(x) = \cos\left(\sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

と定義する．ただし，$y = \sin^{-1} t$ とすると $t = \sin y$ の関係があり，その導関数は $|t| < 1$ のとき $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ である．

(1) $f(x)$, $g(x)$ が単調増加関数であることを示せ．

(2) $h(x)$ の導関数を計算せよ．

(3) $F(x) = h(x) - \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ とするとき，$F(x)$ が恒等的に 0 であることを示せ．

実数: real number, 関数: function, 定義する: define, 単調増加関数: monotone increasing function, 導関数: derivative, 恒等的に: identically.

3. a, b および c を正の定数として以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ を次のように定義する．

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < a, \\ b & a \leq x. \end{cases}$$

このとき次の積分を求めよ．

$$\int_0^\infty \left(b - f(x) \right) \, dx.$$

(2) 関数 $g(x)$ は次の式を満たす．

$$\frac{d^2 g(x)}{dx^2} + \frac{1}{c}\frac{d\,g(x)}{dx} = 0.$$

この一般解は

$$g(x) = d_1 + d_2 e^{-(x/c)}$$

であることを示せ．ただし，d_1, d_2 は任意定数である．また，$g(0) = 0$, かつ $x \to \infty$ のとき $g(x) \to b$ のもとで関数 $g(x)$ を求めよ．

(3) 問 (2) の解を使って次の積分を求めよ．

$$\int_0^\infty \left(b - g(x) \right) \, dx.$$

(4) 等式

$$\int_0^\infty \left(f(x) - g(x) \right) dx = 0$$

が成り立つとき，a と c の間にどのような関係があるか．また，そのときの関数 $f(x)$ と $g(x)$ のグラフの概略を書け．

正の: positive, 定数: constant, 関数: function, 定義する: define, 積分: integral, 一般解: general solution, 解: solution, 等式: equation, 関係: relation, 概略: outline.